

Orthogonalité et distances dans l'espace

- **Rouge** : formules essentielles à retenir
- **Gris foncé** : définitions et vocabulaire
- **Gris clair** : exemples détaillés
- **Vert** : méthodes pas-à-pas
- **Bordeaux** : erreurs fréquentes
- **Bleu** : pour aller plus loin

Prérequis : cours 1 (vecteurs, droites, plans de l'espace), produit scalaire du plan (1^{re}).

Objectif : étendre le produit scalaire à l'espace 3D, en tirer les notions d'*orthogonalité* entre vecteurs, droites et plans, puis calculer des *distances* (projection orthogonale, distance point-plan, point-droite).

Table des matières

1	Produit scalaire dans l'espace	3
1.1	Trois expressions équivalentes	3
1.2	Norme d'un vecteur	3
1.3	Propriétés	4
2	Orthogonalité de deux vecteurs	4
2.1	Définition	4
2.2	Bases orthonormées	5
3	Orthogonalité de droites et plans	5
3.1	Deux droites orthogonales	5
3.2	Une droite orthogonale à un plan	6
4	Vecteur normal à un plan	6
4.1	Définition	6
4.2	Trouver un vecteur normal - méthode systématique	7
4.3	Propriétés fondamentales	7
5	Projeté orthogonal	8
5.1	Projeté orthogonal sur une droite	8
5.2	Projeté orthogonal sur un plan	8

5.3	Distance d'un point à un plan	9
5.4	Distance d'un point à une droite	10
6	Synthèse	10
6.1	Tableau des notions d'orthogonalité	10
6.2	Récapitulatif des distances	11
6.3	Méthode générale de résolution	11

1. Produit scalaire dans l'espace

1.1. Trois expressions équivalentes

Le produit scalaire s'étend naturellement à l'espace. Ses trois expressions habituelles restent valides.

Produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace :

1. Expression géométrique :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

2. Expression avec coordonnées (dans une base orthonormée) : si $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

3. Formule polaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

Erreur fréquente

La formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ n'est valable **que dans une base orthonormée**. Dans une base quelconque, il faut passer par la définition géométrique ou changer de base.

1.2. Norme d'un vecteur

Norme

Dans une base orthonormée, pour $\vec{u}(x; y; z)$:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

On a toujours $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Distance entre deux points

Dans un repère orthonormé, la distance entre $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ vaut :

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Exemple pas à pas

$\vec{u}(2; -1; 3), \vec{v}(1; 4; -2).$

Produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 + (-1) \times 4 + 3 \times (-2) = 2 - 4 - 6 = -8.$$

Normes :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{1 + 16 + 4} = \sqrt{21}.$$

Distance entre $A(1; 0; 2)$ et $B(3; 4; -1)$:

$$AB = \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29}.$$

1.3. Propriétés**Règles de calcul**

Le produit scalaire vérifie :

- **Symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- **Bilinéarité** : $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$ et $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- **Positivité** : $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$, avec égalité si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.

Identités remarquables

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \\ (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

2. Orthogonalité de deux vecteurs**2.1. Définition****Vecteurs orthogonaux**

Deux vecteurs *non nuls* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**, noté $\vec{u} \perp \vec{v}$, si et seulement si :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Interprétation. Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux ssi ils forment un angle droit (la définition géométrique donne $\cos = 0$, donc l'angle vaut 90°).

Exemple

$\vec{u}(2; 3; -1)$ et $\vec{v}(1; -1; -1)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 + 3 \times (-1) + (-1) \times (-1) = 2 - 3 + 1 = 0.$$

Donc $\vec{u} \perp \vec{v}$.

2.2. Bases orthonormées**Base orthonormée**

Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormée** si :

- les trois vecteurs sont **unitaires** : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$,
- les trois vecteurs sont **deux à deux orthogonaux** : $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$.

Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ associé est appelé **repère orthonormé**.

Dans toute la suite, on se placera dans un repère orthonormé (souvent noté « $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ » ou « o.n. » pour « orthonormé »).

3. Orthogonalité de droites et plans**3.1. Deux droites orthogonales****Droites orthogonales**

Deux droites (d_1) et (d_2) sont **orthogonales** si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Erreur fréquente

Orthogonal $\neq$ perpendiculaire ! En 3D :

- Deux droites sont **orthogonales** si leurs directions font un angle droit, *qu'elles se rencontrent ou pas*.
- Deux droites sont **perpendiculaires** si elles sont orthogonales **et** sécantes (donc coplanaires).

Deux droites orthogonales non coplanaires ne sont *pas* perpendiculaires.

3.2. Une droite orthogonale à un plan

Droite orthogonale à un plan

Une droite (d) est **orthogonale** à un plan $\mathcal{P}$ si son vecteur directeur est orthogonal à *tout* vecteur de $\mathcal{P}$.

Caractérisation pratique

Une droite (d) dirigée par $\vec{u}$ est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ dirigé par $(\vec{v}, \vec{w})$ si et seulement si :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = 0.$$

Il suffit de tester l'orthogonalité de $\vec{u}$ avec **deux** vecteurs directeurs non colinéaires du plan.

Pourquoi ? Tout vecteur du plan s'écrit $\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}$. Alors :

$$\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \beta(\vec{u} \cdot \vec{w}) = 0.$$

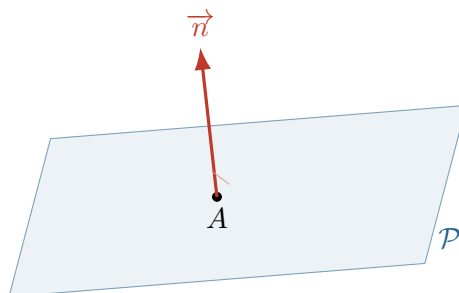
Donc si $\vec{u}$ est orthogonal aux deux vecteurs directeurs, il est orthogonal à *tout* vecteur du plan.

4. Vecteur normal à un plan

4.1. Définition

Vecteur normal

Un vecteur $\vec{n}$ est **normal** à un plan $\mathcal{P}$ si $\vec{n} \neq \vec{0}$ et si $\vec{n}$ est orthogonal à *tout* vecteur du plan (autrement dit, $\vec{n}$ dirige une droite orthogonale à $\mathcal{P}$).



Caractérisation pratique (à retenir absolument)

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement s'il est orthogonal à **deux vecteurs directeurs non colinéaires** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{P}$:

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{n} \cdot \vec{v} = 0.$$

4.2. Trouver un vecteur normal - méthode systématique

Marche à suivre

On dispose de deux vecteurs directeurs $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(a'; b'; c')$ non colinéaires du plan.

1. Poser $\vec{n}(x; y; z)$.

2. Écrire le système :

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

3. Le système a une infinité de solutions (proportionnelles) : fixer une des inconnues (souvent poser $z = 1$ ou $z = c \cdot c'$) et résoudre pour les 2 autres.

4. Vérifier en calculant $\vec{n} \cdot \vec{u}$ et $\vec{n} \cdot \vec{v}$.

Exemple : trouver un vecteur normal au plan (ABC)

$A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$, $C(0; 3; 1)$.

Vecteurs directeurs du plan :

$$\overrightarrow{AB}(1; 1; -2), \quad \overrightarrow{AC}(-1; 3; -1).$$

Soit $\vec{n}(x; y; z)$. Le système est :

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

Somme des deux équations : $4y - 3z = 0$, donc $y = \frac{3z}{4}$.

Prenons $z = 4$: $y = 3$, puis $x = 2z - y = 8 - 3 = 5$.

Vecteur normal : $\vec{n}(5; 3; 4)$.

Vérification : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 5 + 3 - 8 = 0$. ✓ $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -5 + 9 - 4 = 0$. ✓

4.3. Propriétés fondamentales

Théorèmes clés

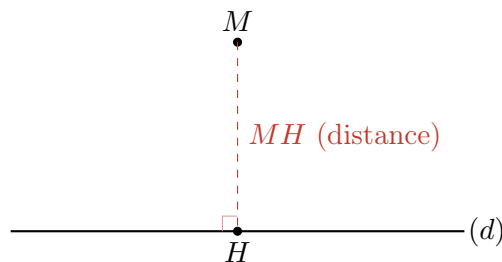
- **Existence** : tout plan possède au moins un vecteur normal.
- **Unicité à un facteur près** : deux vecteurs normaux à un même plan sont colinéaires.
- **Parallélisme de deux plans** : deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.
- **Orthogonalité de deux plans** : deux plans sont orthogonaux (dits *perpendiculaires* pour les plans) si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

5. Projeté orthogonal

5.1. Projeté orthogonal sur une droite

Projeté orthogonal sur une droite

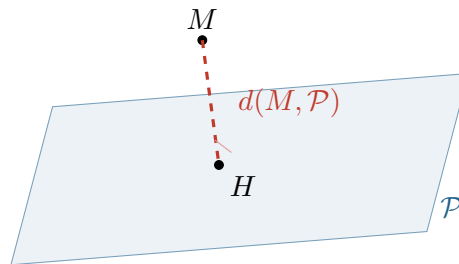
Soient (d) une droite et M un point de l'espace. Le **projeté orthogonal** de M sur (d) est le point $H \in (d)$ tel que $\overrightarrow{MH}$ soit orthogonal à (d) .
 H est le point de (d) le plus proche de M .



5.2. Projeté orthogonal sur un plan

Projeté orthogonal sur un plan

Soient $\mathcal{P}$ un plan et M un point de l'espace. Le **projeté orthogonal** de M sur $\mathcal{P}$ est le point $H \in \mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{MH}$ soit *normal* au plan $\mathcal{P}$.
 H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M .



Méthode : calculer le projeté orthogonal sur un plan

Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$, et M un point.

1. La droite (MH) est orthogonale à $\mathcal{P}$, donc $\vec{n}$ en est un vecteur directeur.
2. Écrire la droite passant par M de vecteur directeur $\vec{n}$ (cela nécessite une représentation paramétrique, voir Cours 3).
3. Trouver l'intersection de cette droite avec $\mathcal{P}$: c'est H .

5.3. Distance d'un point à un plan

Distance d'un point à un plan

La **distance** d'un point M à un plan $\mathcal{P}$, notée $d(M, \mathcal{P})$, est la distance MH où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.

C'est le minimum des distances MK pour $K \in \mathcal{P}$.

Formule directe (à connaître)

Si $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ (voir Cours 3) et $M(x_M; y_M; z_M)$, alors :

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Le numérateur est « l'équation évaluée en M », en valeur absolue. Le dénominateur est la norme du vecteur normal.

Exemple

Distance de $M(3; -1; 2)$ au plan $\mathcal{P} : 2x + y - 2z + 4 = 0$.

Numérateur : $|2(3) + (-1) - 2(2) + 4| = |6 - 1 - 4 + 4| = |5| = 5$.

Dénominateur : $\sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$.

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{5}{3}.$$

Preuve de la formule

Soit $A \in \mathcal{P}$. Alors $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \|\overrightarrow{AM}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \cos(\overrightarrow{AM}, \vec{n})$.

Le projeté orthogonal donne $MH = \|\overrightarrow{AM}\| \cdot |\cos(\overrightarrow{AM}, \vec{n})|$, donc :

$$MH = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$$

En développant $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$ et en utilisant que A vérifie l'équation, on obtient la formule.

5.4. Distance d'un point à une droite

Méthode

Soit (d) une droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$, et M un point. Le projeté orthogonal H de M sur (d) vérifie :

1. $H \in (d)$: donc $\overrightarrow{AH} = t\vec{u}$ pour un certain t .
2. $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u}$: donc $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$.

En développant $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{MA} + t\vec{u}$, la condition $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$ donne :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u} + t\|\vec{u}\|^2 = 0 \iff t = -\frac{\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}.$$

La distance MH se calcule ensuite explicitement.

Exemple

Distance de $M(1; 0; 3)$ à la droite (d) passant par $A(0; 1; 2)$ de vecteur directeur $\vec{u}(1; 1; 0)$.

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = (-1; 1; -1).$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u} = -1 + 1 + 0 = 0. \text{ Donc } t = 0, \text{ autrement dit } H = A.$$

$$d(M, (d)) = MA = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}.$$

Ici $\overrightarrow{MA}$ était déjà perpendiculaire à $\vec{u}$, ce qui a simplifié le calcul.

6. Synthèse

6.1. Tableau des notions d'orthogonalité

Notion	Caractérisation
Vecteurs orthogonaux	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
Droites orthogonales	vecteurs directeurs orthogonaux
Droite perpendiculaire à une droite	orthogonales <i>et</i> sécantes
Droite orthogonale à un plan	$\vec{u}$ orthogonal à 2 vecteurs directeurs
Vecteur normal à un plan	vecteur non nul orthogonal à tout $\mathcal{P}$
Plans parallèles	vecteurs normaux colinéaires
Plans orthogonaux	vecteurs normaux orthogonaux

6.2. Récapitulatif des distances

Distance	Formule ou méthode
M à N (deux points)	$\sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2}$
M à un plan $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$	$\frac{ ax_M + by_M + cz_M + d }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
M à une droite (d) passant par A , dir. $\vec{u}$	calculer le projeté H (via t), puis MH

6.3. Méthode générale de résolution

Face à un exercice d'orthogonalité/distance

1. **Identifier ce qu'on cherche** : orthogonalité de vecteurs / droites / plans, projeté, distance.
2. **Repère orthonormé ?** Sinon, ne pas utiliser $xx' + yy' + zz'$.
3. **Utiliser le produit scalaire** : c'est l'outil central. Nul = orthogonal.
4. **Pour un vecteur normal** : chercher $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (système 2×3).
5. **Pour une distance à un plan** : formule directe si l'équation cartésienne est connue.